

Sciences à l'École



# LA BELLE HELENE DES GEOMETRES

Quelle pente offre le chemin le plus rapide pour la chute d'un objet ?

Réalisé par les terminales du lycée Gabriel Guist'hau



# SOMMAIRE

## I) QUI SOMMES NOUS ?

## II) INTRODUCTION

## III) CONTEXTE HISTORIQUE

## IV) DEMONSTRONS QUE LA DURÉE DU MOUVEMENT DE LA BILLE LE LONG DE LA CYCLOÏDE NE DÉPEND NI DE SA HAUTEUR INITIALE NI DE SA MASSE

- A) La cycloïde
- B) Angle  $\Phi$  formé par la tangente en M avec l'horizontale
- C) Expression littérale de la période du mouvement de la bille sur la cycloïde
- D) Bilan
- E) Expérimentons !

## V) PEUT ON ÉTABLIR UN LIEN ENTRE UNE BILLE OSCILLANT SUR LA CYCLOÏDE ET UN PENDULE SIMPLE DIT "PENDULE CYCLOÏDAL" ?

- A) Quelle serait la longueur d'un pendule simple ayant la même période que la bille se déplaçant dans la cycloïde ?
- B) Pour aller plus loin sur le pendule cycloïdal

## VI) PARVENIR AU POINT B EN PARTANT DE A LE PLUS RAPIDEMENT POSSIBLE

- A) Détermination de la durée du mouvement suivant la pente rectiligne
- B) Détermination de la durée du mouvement suivant la courbe cycloïdale et à pic
- C) Elargissement du sujet de la courbe à des intérêts dans la vie de tous les jours

## VII) CONCLUSION

### ANNEXE 1 : RÉALISATION DES MAQUETTES

- A) La construction de la maquette de la cycloïde
- B) Utilisation de notre maquette en condition réelle : possède-t-elle les caractéristiques obtenues ?
- C) Nos autres maquettes

### ANNEXE 2 : QR CODES POUR VISUALISER LES EXPERIENCES REALISEES

- A) Les vidéos de manipulation consistant à lâcher une même bille sans vitesse initiale sur la maquette cycloïdale afin de calculer  $T/4$
- B) Vidéos de la compétition de billes le long d'une pente "à pic" ou rectiligne ou cycloïdale.
- C) Vidéos du pendule avec des oscillations de 20 et 30°

qr code vers notre vidéo de présentation :



## I) QUI SOMMES NOUS ?



Aude (actrice, rédactrice)



Claire (actrice, rédactrice)



Gabin (maquettiste, acteur, rédacteur)



Konan (monteur et acteur)



Louise (cadreuse)



Maxime (monteur)

Ce projet n'aurait pas été réalisable sans l'aide de M. Balavoine, notre professeur de physique-chimie au lycée, très investi et motivé, qui nous a permis de mener à bout notre projet ; Mme Catherine Billant, professeur de prépa au lycée Aristide Briand qui nous a aidé à relire certaines démonstrations mathématiques de ce projet ; et enfin Jérôme Andrieu, père d'un membre de l'équipe, aide essentiel pour la construction de nos maquettes !

## II) INTRODUCTION

Imaginons une course de billes dont le but serait de se déplacer d'un point A à un point B de la manière la plus rapide possible. Sans doute beaucoup d'entre vous auront pensé que la bille gagnante devrait suivre une pente raide et droite reliant ces deux points ; mais est-ce vraiment le cas ? N'y a-t-il pas un modèle de pente plus optimisé qui permettrait à la bille d'arriver en première dans n'importe quelle situation ? Ainsi nous sommes-nous posé la question de **quelle pente offrait le chemin le plus rapide pour la chute d'un objet** : une problématique qui nous a amené à nous poser pleins de questions et à apprendre énormément sur la "belle Hélène des géomètres", c'est-à-dire la cycloïde !

Par le biais de construction de maquettes, d'expériences, de ratés comme de réussites, nous avons pu finalement aboutir à un résultat qui venait enfin répondre à notre question. Voici ci-après, le fruit de notre travail de plusieurs mois :

Nous allons ainsi vous présenter la **cycloïde**. Cette courbe peut être matérialisée par la trajectoire d'un point fixé à un cercle qui roule sans glisser sur une droite. On parle alors de **courbe cycloïdale**.

Elle possède plusieurs propriétés :

- Celle d'être **brachistochrone**, c'est la courbe qui permet au système de se mouvoir avec une durée la plus courte.
- Celle d'être **tautochrone** : tout point matériel lâché sans vitesse initiale sur la courbe arrive en un point donné en un temps indépendant du point de départ.
- Enfin celle d'être **isochrone**, cette fois un mouvement périodique dont la période est indépendante de la position initiale ou de l'amplitude dans le cas d'un pendule.

Nous avons choisi ce sujet car il a joué un rôle important dans l'histoire des sciences. Durant le XVIIème siècle, de nombreux scientifiques de haute volée se sont attablés à son étude : Huygens, Bernoulli, Leibniz, L'Hôpital et Newton pour ne citer qu'eux. Ainsi grâce à Newton plus particulièrement, l'étude de la cycloïde a été le point de départ de l'élaboration du calcul des variations.

### III) CONTEXTE HISTORIQUE

En 1696, **Jean Bernoulli** lance un défi à tous les plus grands mathématiciens de son époque, trouver la solution au problème suivant : « deux points A et B étant donné dans un plan vertical, déterminer la courbe AMB le long de laquelle un mobile M abandonné en A descend sous l'action de sa propre pesanteur et parvient à l'autre point B dans le moins de temps possible ». Il donne avec cela l'indice que **la solution n'est pas une droite** bien que cela serait le chemin avec une distance minimale ! Seulement 5 personnes parviennent à formuler la réponse correcte : lui-même, son frère Jacques Bernoulli, Leibniz, le marquis de l'Hôpital, et enfin une personne anonyme -car il craignait d'avoir proposé une réponse fautive qui aurait taché sa réputation- (se révélant être plus tard être Isaac Newton, ayant résolu le problème en une seule soirée !).

Notre problème a donc pour solution la fameuse **cycloïde**, cette courbe engendrée par le déplacement d'un point suivant un cercle roulant sans glisser sur un axe. Cela semble pour l'époque complètement fou car Huygens venait de prouver quelques années auparavant que la cycloïde est également **isochrone** (c'est-à-dire qu'une bille lâchée ou un pendule cycloïdal possède une période constante, quel que soit l'amplitude des oscillations). La découverte de la cycloïde est donc une **avancée majeure** et **soudaine** pour l'époque !



Jean BERNOULLI



Christian HUYGENS

*source : Article de Hélène Antaya, professeure à l'université de Montréal*

## IV) DEMONSTRONS QUE LA DURÉE DU MOUVEMENT DE LA BILLE LE LONG DE LA CYCLOÏDE NE DÉPEND NI DE SA HAUTEUR INITIALE NI DE SA MASSE :

Pour cela, nous allons devoir formuler en premier lieu 3 hypothèses :

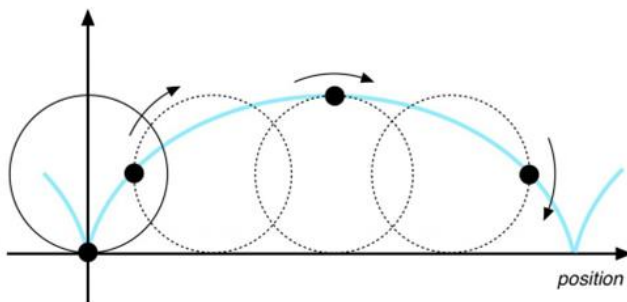
- C'est le **centre de masse** de la bille qui sera étudié afin de ne pas tenir compte du mouvement de rotation de la bille sur elle-même.

- On suppose que la bille se déplace avec une **vitesse initiale nulle**.

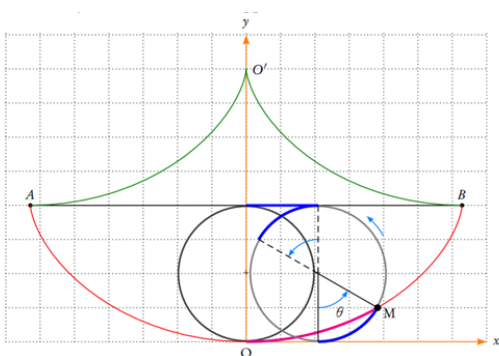
- On suppose que toutes les actions de l'air sont **négligeables** (frottement entre la bille et l'air nommés « frottement fluide » et poussée d'Archimède car la bille déplace son volume d'air et subit alors une poussée verticale égale au poids de cet air déplacé mais cela est négligeable). On suppose aussi que les frottements entre le support et la bille sont **négligeables** (frottements dit solides).

### A) La cycloïde

C'est la courbe qui est générée par un point appartenant à un cercle qui roule sur un support sans glisser sur celui-ci :



Comment peut-on décrire l'abscisse  $x$  et l'ordonnée  $y$  d'un point  $M$  quelconque de la cycloïde à un instant donné ?



A  $t=0$ , le point  $M$  est confondu avec l'origine du repère. On note  $\Theta$  l'angle formé entre la verticale  $CH$  et  $CM$ ,  $C$  étant le centre du cercle.  $\Theta = \pi$  au point  $B$  et  $\Theta = -\pi$  en  $A$ . La cycloïde se reproduit identique à elle-même quand  $\Theta' = \Theta + 2k\pi$   $k$  étant un entier relatif. On peut donc étudier dans un premier temps la courbe pour  $\Theta$  compris entre  $-\pi$  et  $\pi$ .

Remarquons aussi que la cycloïde est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (on dit que y ordonnée de M est une fonction paire) : on peut donc en fait l'étudier pour  $\Theta$  compris entre 0 et  $\pi$  et par symétrie en déduire le reste de la cycloïde matérialisée ici par la courbe rouge entre A et B.

L'abscisse x à un instant donné est  $x = OH + R \sin \Theta$  et si le cercle roule sans glisser sur l'axe des abscisses alors  $OH = R \Theta$  (R étant le rayon du cercle).

Ainsi :  $x = R (\Theta + \sin \Theta)$  (On a donc  $AB = 2\pi R$ , c'est normal puisque lorsque le cercle a fait un tour sur lui-même il a décrit l'arche de cycloïde en rouge et il s'est appuyé sur toute sa circonférence en se déplaçant sur le support).

L'ordonnée y est :  $y = R - R \cos \Theta = R (1 - \cos \Theta)$

Ainsi, les équations paramétriques de la cycloïde sont :

$$x(\Theta) = R (\Theta + \sin \Theta)$$

$$y(\Theta) = R (1 - \cos \Theta)$$

Le paramètre dont dépendent x et y est l'angle  $\Theta$ .

Les physiciens nomment l'étude du mouvement de M un mouvement à « un degré de liberté » qui est ici  $\Theta$ .

### B) Angle $\Phi$ formé par la tangente en M avec l'horizontale

Le coefficient directeur de la tan  $\Phi$  est la dérivée  $dy/dx$ .

$$\text{Or } dx/d\Phi = R(1+\cos \Phi) \text{ et } dy/d\Phi = R \sin \Phi$$

$$\text{Ainsi } dx = R(1+\cos \Phi) d\Phi \text{ et } dy = R \sin \Phi d\Phi$$

$$\text{Donc } dy/dx = R \sin \Phi d\Phi / (R(1+\cos \Phi) d\Phi) = \sin \Phi / 1+\cos \Phi$$

Utilisons des formules de trigonométrie. Pour tout angle  $\Theta$  on a :

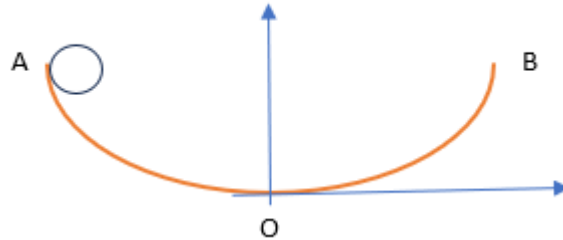
$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

On en déduit que  $dy/dx = \sin(\Phi/2) / \cos(\Phi/2) = \tan(\Phi/2)$ . Or  $dy/dx = \tan \Phi$ .

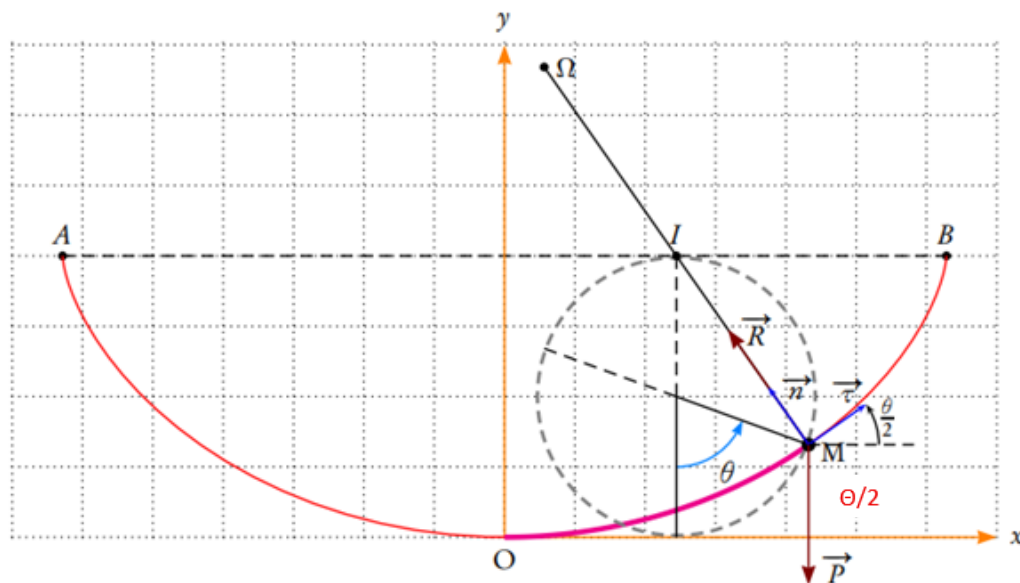
Donc  $\Phi = \Theta / 2$ .

### C) Expression littérale de la période du mouvement de la bille sur la cycloïde

En l'absence de frottement, on observe la bille, lâchée sans vitesse initiale au point A, être animée d'un mouvement périodique entre les points A et B de période T.



Quelle est l'expression de T ? Pour répondre à cette question, appliquons le 2° loi de Newton au centre de masse M de la bille (de masse m) dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La bille est soumise à deux forces : son poids et la réaction du support. En l'absence de frottement, la réaction du support est perpendiculaire à celui-ci on obtient donc :



$$\vec{P} + \vec{R} = m \vec{a}$$

On appelle abscisse curviligne la distance  $s = OM$

parcourue le long du chemin suivi sur la trajectoire entre O et M par le centre de masse de la bille. La valeur de l'accélération est la dérivée seconde de s donc  $\vec{a} = d^2s/dt^2$ .

La projection du poids  $\vec{P}$  suivant le vecteur unitaire tangent à la trajectoire  $\vec{\tau}$  (et orienté dans le sens de la trajectoire) est :  $- m g \sin (\theta/2)$



L'intérêt de projeter la 2<sup>e</sup> loi de Newton suivant la tangente à la courbe est de faire disparaître dans la relation obtenue la réaction du support qui est inconnue. En effet, la projection de  $\vec{R}$  dans cette direction est nulle.

La 2<sup>e</sup> loi de Newton s'écrit donc  $m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin(\Theta/2)$  après projection suivant  $\vec{\tau}$ .

Ainsi  $\frac{d^2s}{dt^2} = -g \sin(\Theta/2)$  (1)

Considérons un déplacement élémentaire  $ds$  le long de la cycloïde :

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$  (on se déplace de  $dx$  suivant l'axe des  $x$  et  $dy$  suivant l'axe  $y$ ). Or nous avons vu que :

$$dx = R(1 + \cos \Theta) d\Theta \text{ et } dy = R \sin \Theta d\Theta$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{R^2(1 + \cos \Theta)^2 + R^2 \sin^2 \Theta} d\Theta = R \sqrt{1 + \sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta + 2\cos \Theta} \\ &= R\sqrt{(1+1+2\cos\Theta)} \end{aligned}$$

Ainsi :  $ds = R\sqrt{2+2\cos^2\Theta}$  . Or  $1 + \cos^2 \Theta = 2 \cos(\Theta/2)$  (relation de trigonométrie).

Donc  $ds = 2R |\cos(\Theta/2)|$  . Or nous pouvons étudier le mouvement de la bille pour  $\Theta$  compris entre 0 et  $\pi$ , et sur cet intervalle  $\cos(\Theta/2)$  est positif, donc :  $ds = 2R \cos(\Theta/2)$ .

Nous voyons que  $s$  est la primitive de  $2R \cos(\Theta/2)$  donc  $s = 4R \sin(\Theta/2) + s_0$  ( $s_0$  est la constante d'intégration).

Or à  $t=0$ , le point matériel  $M$  est à l'origine du repère pour  $\Theta = 0$  et  $s = 0$ .

Donc  $0 = 4R \sin(0/2) + s_0$  donc  $s_0 = 0$ .

Ainsi :  $s = 4R \sin(\Theta/2)$ , le point  $M$  étant initialement à l'origine du repère.

L'équation (1) s'écrit donc :  $\frac{d^2s}{dt^2} = - (g/4R) s$  soit finalement :  $\frac{d^2s}{dt^2} + (g/4R) s = 0$ . (2)

Analyse dimensionnelle :  $\frac{d^2s}{dt^2}$  s'exprime en  $m.s^{-2}$  donc  $(g/4R) s$  également, or  $s$  s'exprime en  $m$ . Donc  $g/4R$  s'exprime en  $s^{-2}$ . C'est une pulsation au carré :  $\omega^2 = g/4R$ .

Or  $\omega$  et la période du mouvement  $T$  sont reliées par la relation :

$$T = 2\pi / \omega \text{ donc } T = 2\pi / \sqrt{g/4R} = 4\pi \sqrt{R/g}.$$

#### D) Bilan

$T = 4\pi \sqrt{R/g}$ . La période du mouvement de la bille, dans les conditions d'étude de son mouvement est donc **indépendante de sa masse mais aussi de la position initiale de celle-ci**. Ainsi, deux billes posées à des hauteurs différentes sur la cycloïde arriveront **au même instant au point 0 le plus bas de la cycloïde**.

La durée du mouvement d'une bille initialement en  $A$  et arrivant en  $O$  est le quart de la période  $T$  soit :  $t = \pi \sqrt{R/g}$ .

## E) Expérimentons !

Nous avons réalisé sept fois la manipulation consistant à lâcher une même balle sans vitesse initiale sur la maquette cycloïdale (voir les vidéos en **annexe 2**). Nous avons utilisé le logiciel atelier scientifique afin de déterminer une valeur de  $T/4$  moyenne, pour gagner en précision. La stratégie adoptée consiste pour nous à déterminer l'instant où la balle se situe au point le plus bas de la trajectoire. Nous avons réalisé le pointage du centre de masse de la balle, et en examinant la valeur de l'ordonnée  $y$ , nous pouvons déceler l'instant où celle-ci est la plus faible ce qui correspond bien au point de la trajectoire la plus basse. Nous obtenons  $T/4 = 0,42$  s en moyenne. Le logiciel atelier scientifique nous fournit une vidéo avec 33 images par seconde. Or, nous déterminons la position initiale et finale de la balle à une image près. Donc, l'incertitude sur la mesure de  $T/4$  pour une expérience est donc de  $2 \times 0,033 = 0,066$  s. Ayant réalisé sept expériences, l'incertitude  $U(T)$  sur la mesure de  $T/4$  est donc de  $0,066/7 = 0,0094$  s soit avec un seul chiffre significatif :  $U(T) = 0,01$  s.

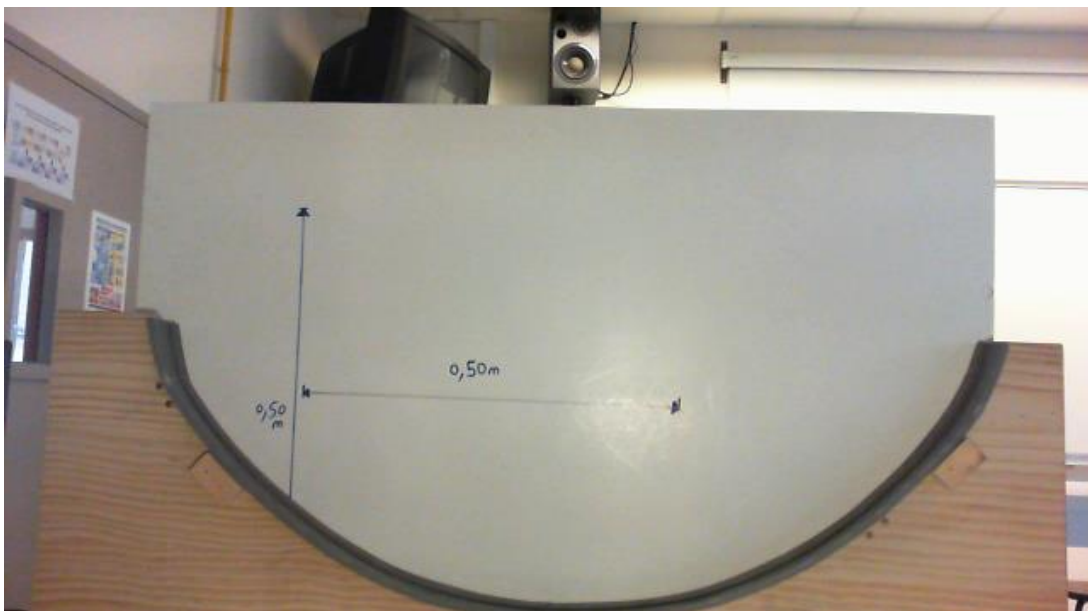
Donc  $T/4$  déterminée expérimentalement se situe entre 0,41 s et 0,43 s.

Mais quelle est la valeur théorique de  $T/4$  ?

Le calcul de  $T/4$  (durée pour se mouvoir de la position initiale au point le plus bas de la trajectoire)  $= \pi \sqrt{R/g} = 0,43$  s. Le chemin suivi par la balle étant une cycloïde générée par le mouvement d'un cercle de rayon  $R=0,18$  m (rayon du cercle générateur de la cycloïde de la maquette **VOIR PLUS BAS OU ANNEXE**).

Nous pouvons conclure que la valeur théorique se trouve bien dans l'intervalle trouvé grâce aux expérimentations ! Cela semble conforter le modèle théorique adopté.

Remarque : L'équation **(2)** (vu auparavant)  $d^2s/dt^2 + (g/4R) s = 0$  est célèbre en physique. C'est l'équation traduisant le mouvement d'un oscillateur harmonique. Une solution de cette équation est :  $s = s_0 \sin(\omega t)$  avec  $\omega$  la pulsation du mouvement.



*Maquette de la cycloïde nous ayant servie à réaliser les mesures*

## V) PEUT ON ÉTABLIR UN LIEN ENTRE UNE BILLE OSCILLANT SUR LA CYCLOÏDE ET UN PENDULE SIMPLE DIT "PENDULE CYCLOÏDAL" ?

Le même type d'étude concernant le « pendule simple », c'est-à-dire l'étude d'une masse  $m$  ponctuelle fixée à un fil de longueur  $l$  de masse négligeable et inextensible, conduit là encore, d'après nos recherches, à une équation de type « oscillateur harmonique » avec pour pulsation  $\omega = 2\pi\nu(l/g)$  ( on peut vérifier que  $l/g$  s'exprime en  $s^{-2}$  donc  $\nu(l/g)$  en  $s^{-1}$  et donc  $\omega$  s'exprime donc en  $\text{rad}\cdot s^{-1}$  comme une pulsation.

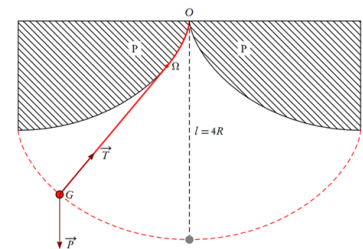
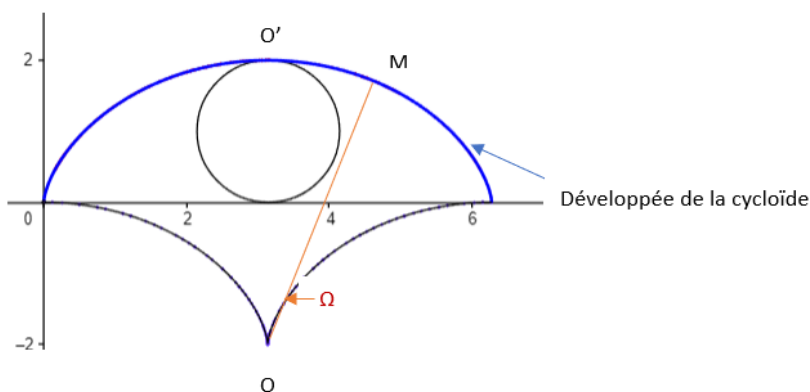
### A) Quelle serait la longueur d'un pendule simple ayant la même période que la bille se déplaçant dans la cycloïde ?

Il faut que :  $T = 4\pi\nu(R/g) = 2\pi\nu(l/g)$  soit  $l = 4R$ .

**Le pendule simple recherché a donc une longueur  $l = 4R$ .**

Est-ce la seule condition ? Si on souhaite un pendule dont la période ne dépend pas de l'amplitude initiale  $\Theta$  (angle entre le pendule est la verticale passant par le point d'accroche du fil) il faut exploiter l'étude qui a été faite de la bille se déplaçant sur la cycloïde qui justement répond à cette condition d'indépendance de la période du mouvement et de l'amplitude initiale  $\Theta$ . Donc le pendule doit se mouvoir « **virtuellement sur une cycloïde** » : **c'est le pendule cycloïdal imaginé par Huygens.**

Le mouvement du centre de masse  $M$  de la bille s'effectue localement à chaque instant avec un rayon de courbure  $\Omega M$  :



L'ensemble des centres de courbure  $\Omega$  forment au cours du mouvement de  $M$  sur la cycloïde « la développée » de la cycloïde en vert ci-dessus. Remarquons que  **$OO' = 4R$** .

Ainsi, en fixant le pendule simple en  $O$  avec de part et d'autre une développée de cycloïde (hachurée et notée  $P$  ci-dessous), le pendule de longueur  $4R$  aura la même période que  $M$  se déplaçant sur la cycloïde et la période du pendule sera indépendante

de l'amplitude initiale : **on obtient l'isochronisme des oscillations du pendule et pas seulement pour de faibles amplitudes a priori.** C'était l'objectif de Huygens.

Notre maquette (**VOIR PLUS BAS OU EN ANNEXE**) possède ainsi de même l'isochronisme de ses oscillations, nous avons donc également réussi à reproduire un pendule dit "cycloïdal"

Vérifions expérimentalement que notre pendule cycloïdal présente une période indépendante de l'amplitude initiale de ses oscillations.

Prenons deux valeurs d'amplitudes initiales : 20 ° et 30 °. Grâce au logiciel atelier scientifique, déterminons la valeur de 5 périodes (pour gagner en précision). Les vidéos sont disponibles en **ANNEXE 2**.

Résultats :

Amplitude initiale en degré	T (période)
20°	$T_{20} = 1,59$ s
30°	$T_{30} = 1,61$ s

Mais quelle est l'incertitude sur la détermination de T ?

Nous avons déterminé T à une image près au début et à la fin de l'analyse du mouvement du pendule au cours de 5 oscillations. Donc l'incertitude  $U(T) = 2 \times 0,033/5 = 0,0132$  s soit avec un seul chiffre significatif :  $U(T) = 0,02$  s.

Donc  $T_{20}$  est compris entre 1,57 s et 1,61 s et  $T_{30} = 1,59$  s et 1,63 s.

Mais en théorie, quelle est la valeur de T ? D'après nos recherches,  $T = 2\pi \sqrt{l/g}$  avec l la longueur du pendule et g l'intensité de la pesanteur. Le pendule réalisé a pour longueur  $l = 0,64$  m donc :

$$T = 2\pi \sqrt{0.64/9.81} = 1,60 \text{ s.}$$

On peut remarquer qu'en réalité T théo, période prévue par la théorie, est elle-même en fait entachée d'une incertitude puisque on a mesuré l avec une certaine précision (nous estimons que l est déterminée à 5 mm près). Pour vérifier si les périodes déterminées expérimentalement sont compatibles avec T théo, on réalise un calcul d'incertitude sur T théo :

On a  $U(g) = 0,01$  m.s<sup>-2</sup> avec  $g = 9,81$  m.s<sup>-2</sup> et  $U(l) = 0,005$  m avec  $l = 0,64$  m

$$U(T) = T \sqrt{(u(l)/l)^2 + (u(g)/g)^2}$$

$$\text{Soit : } U(T) = 1,60 \sqrt{((0,005/0,64)^2 + (0,01/9,81)^2)} = 0,01 \text{ s.}$$

Ainsi, T théo est comprise entre 1,59 s et 1,61 s

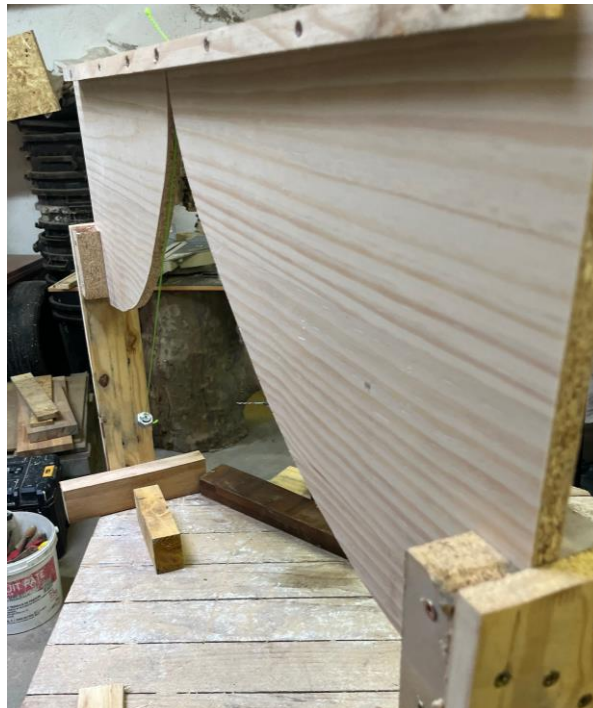
Ainsi, les périodes déterminées expérimentalement et T théo sont donc compatibles.

Nous vérifions que les périodes déterminées avec un angle initial de 20° ou 30° sont compatibles avec T théo et ainsi nous vérifions l'isochronisme des oscillations du pendule cycloïdal.

### **B) Pour aller plus loin dans le pendule cycloïdal**

- La développée de la cycloïde est elle-même constituée de deux demi-branches de cycloïdes générées par un cercle de rayon R.

- La quête d'un pendule isochrone quel que soit l'amplitude initiale était recherché afin de pouvoir notamment mieux s'orienter lors des expéditions sur mer. En effet, alors que la latitude pouvait être déterminée, en mesurant la hauteur du Soleil à midi (au moment de sa culmination par rapport au mât du navire), la longitude demandait de pouvoir connaître l'heure réelle (en temps universel) de cet événement par rapport à la référence de départ, ce qui nécessitait une horloge suffisamment précise.



*Maquette de pendule*

## VI) PARVENIR AU POINT B EN PARTANT DE A LE PLUS RAPIDEMENT POSSIBLE

Maintenant que nous avons étudié certaines caractéristiques de la cycloïde, nous allons pouvoir vérifier si cette dernière est bien la **solution au défi** lancé par Jean Bernoulli.



Maquette réalisée pour les mesures

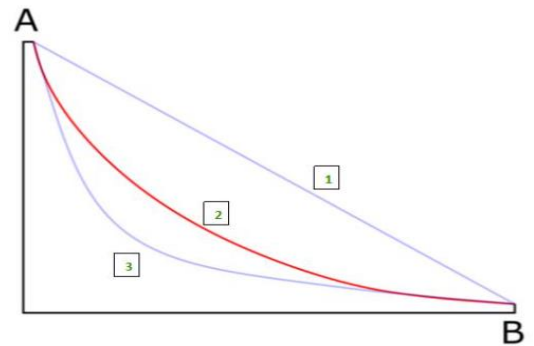


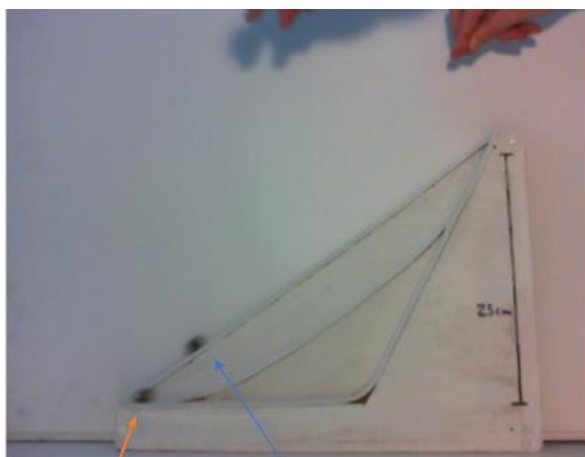
Schéma de notre maquette

La bille est lâchée depuis le point A **sans vitesse initiale** pour arriver en B.

Elle pourra suivre une pente « **rectiligne** » (1) ou une pente **cycloïdale** (2) ou bien encore une pente que nous qualifierons « **à pic** » (3).

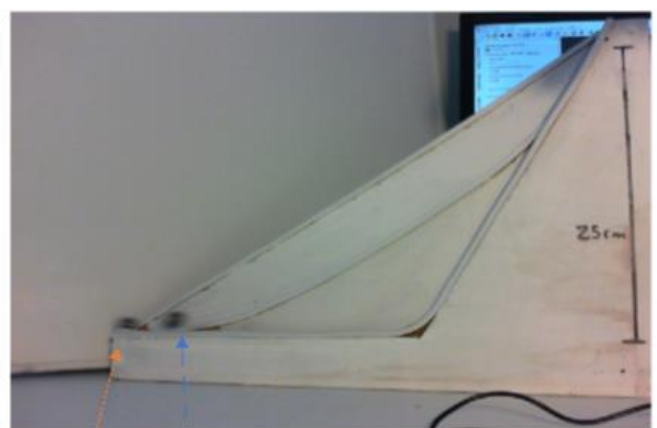
Hypothèses : le chemin le plus court devrait être logiquement aussi le plus rapide. Mais le chemin « à pic » semble également un sérieux candidat au chemin le plus rapide car la bille va accélérer sensiblement. La cycloïdal semble n'avoir aucune chance d'être la bonne candidate. Si Galilée était présent il nous dirait certainement « **réalisez l'expérience !** »

Réalisons l'expérience avec une bille sur une pente rectiligne et une autre sur une cycloïde puis réalisons l'expérience avec une bille sur une pente « à pic » et une autre sur une cycloïde (voir les vidéos d'expériences en annexe 2) :



Cycloïde

Droite



Cycloïde

A pic

Contre toute attente, c'est la **cycloïde qui l'emporte** ! Nous allons maintenant essayer de confirmer ce résultat grâce aux mathématiques par la détermination de la durée du mouvement théorique. Pour cela deux hypothèses doivent être formulées :

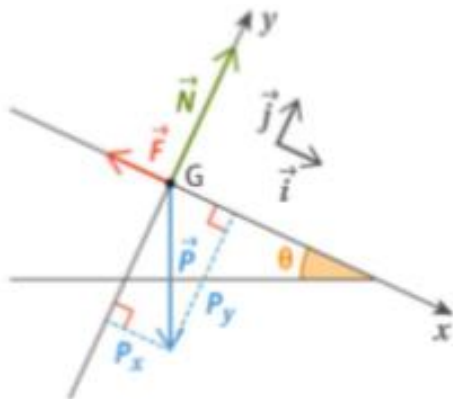
- la vitesse initiale du centre de masse de la bille étudiée est **nulle**.
- Les frottements fluides ou solides sont **négligés**.

Le système étudié est le centre de masse G de la bille de masse m dans un référentiel terrestre, supposé Galiléen.

### A) Détermination de la durée du mouvement suivant la pente rectiligne

Bilan des forces : dans ces conditions, le poids de la bille et la réaction du support sont **les seules forces agissant sur le système étudié**.

L'application de la 2<sup>e</sup> loi de Newton au système étudié s'écrit :  $m\vec{a}(G) = \vec{P} + \vec{N}$



Ici la force de frottement F est négligeable.

Projetons la 2<sup>e</sup> loi de Newton suivant l'axe des abscisses puis suivant l'axe des ordonnées :

**(1)**  $P_x = m d^2x/dt^2$

**(2)**  $N - P_y = m d^2y/dt^2$

**(1)** donne :  $mg \sin \Theta = m d^2x/dt^2$  soit  $d^2x/dt^2 = g \sin \Theta$

**(2)** comporte la valeur de la réaction du support N inconnue, nous ne l'exploiterons pas.

Intégrons **(1)** :  $dx/dt = g \sin \Theta t + A$  avec  $A = v_x(t=0) = 0$  car la vitesse initiale est nulle.

Intégrons une nouvelle fois :  $x(t) = g \sin \Theta t^2 / 2 + x(t=0)$ .

$x(t=0) = 0$  en partant de l'origine du repère donc :  $x(t) = g \sin \Theta t^2 / 2$

→ La durée du mouvement de la bille sur la maquette pour arrivée au point le plus bas de la pente est donc :  $t = \sqrt{2 D / g \sin \Theta}$  avec D la distance parcourue sur la maquette suivant l'axe des abscisses.

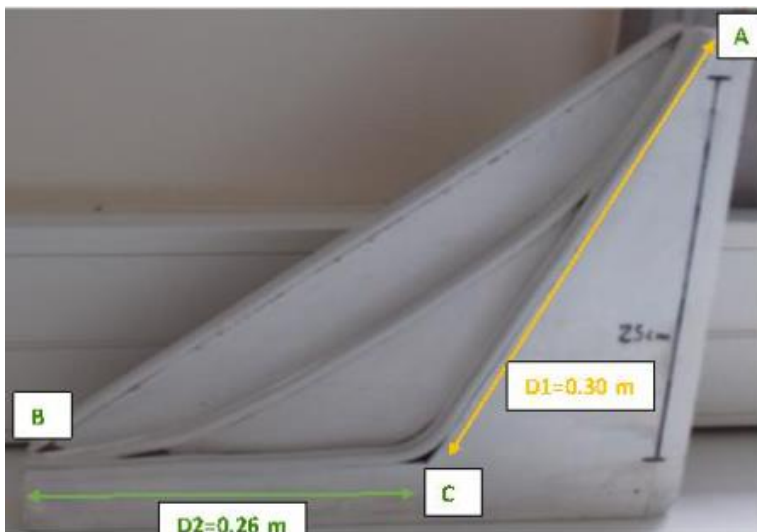
La mesure de D indique que  $D = 49 \text{ cm} = 0,49 \text{ m}$ . On mesure  $\Theta : \Theta = 33^\circ$ .

Ainsi  $t(\text{rectiligne})$  recherché est  $t(\text{rectiligne}) = \sqrt{2 D / g \sin \Theta} = \sqrt{2 \times 0,49 / 9,81 \times \sin 33}$   
**= 0,43 s.**

### B) Détermination de la durée du mouvement suivant la pente cycloïdale et à pic

Elle a été déterminée précédemment :  $t(\text{cycloïde}) = \pi \sqrt{Rg} = 3,14 \times \sqrt{0,179 \cdot 9,81} = 0,41 \text{ s}$  en tenant compte du fait que le rayon de la bille est de 0,5 cm et que l'épaisseur de la bande sur laquelle se déplace la bille est de 0,5 cm également, ce qui donne  $R = 0,18 - 0,01 = 0,17 \text{ m}$  pour la cycloïde.

Conclusion : la durée théorique sur la pente cycloïdale est donc légèrement **inférieure** à celle sur le chemin le plus court en distance ! **Le chemin le plus court n'est pas le plus rapide !** C'est bien ce qui est observé en réalisant la manipulation avec la maquette réalisée.



La pente à pic présente un angle par rapport à la verticale  $\alpha = 60^\circ$ .

La durée pour parcourir D1 est  $t_1 = \sqrt{2 D_1 / g \sin \Theta} = 0,27 \text{ s}$ .

Déterminons la durée  $t_2$  pour parcourir la distance D2.

Il faut tout d'abord calculer la vitesse  $v(C)$  au point C en appliquant le **théorème de l'énergie cinétique** entre A et C :

$E_c(\text{finale}) - E_c(\text{initiale}) = E_c(C) - E_c(A) = \sum W(F) = W(P) + W(R)$ ; ici seul le travail du poids n'est pas nul. En effet, le travail de la réaction R du support est nul car cette force est perpendiculaire au déplacement du centre de masse de la bille. Donc  $\sum W(F) = P$  car nous négligeons, de plus, les frottements.  $E_c(A) = 0$  car la vitesse initiale est nulle soit :  $E_c(C) = W(P)$



= + mg h (h étant la différence d'altitude entre le point A et le point C et le travail est moteur, donc positif). D'autre part,  $E_c(C) = \frac{1}{2} m v^2(C)$ . → → →

Donc  $\frac{1}{2} v^2(C) = gh$  or g l'intensité de la pesanteur = 9,81 N.KG<sup>(-1)</sup>

Or  $\sin \alpha = h / D_1$  donc  $\frac{1}{2} v^2(C) = g \sin \alpha D_1$

ce qui nous donne finalement :  **$v(C) = 2,3 \text{ m.s}^{(-1)}$**

Montrons également avec le théorème de l'énergie cinétique que  $v(B) = v(C)$  :

$E_c(\text{finale}) - E_c(\text{initiale}) = E_c(B) - E_c(A) = W(P)$  car les mêmes conditions que pour calculer la vitesse C s'applique, nous obtenons donc  $\frac{1}{2} v^2(B) = gh$  soit  **$v(B) = 2,3 \text{ m.s}^{(-1)} = v(C)$**

Connaissant la vitesse v entre B et C qui est de 2,3 m.s<sup>(-1)</sup> comme nous venons de le calculer, nous n'avons plus qu'à remarquer que  $t_2 = v / D_2 = 0,12 \text{ s}$

Ainsi, la durée mise par la bille pour aller de A à C sur la pente « à pic » est  **$t_{pic} = t_1 + t_2 = 0,39 \text{ s}$** .

C'est **moins que 0,41 s** sur la pente cycloïdale ! Comment peut-on expliquer ce désaccord avec le résultat de l'expérience ?

Utilisons le logiciel atelier scientifique et réalisons une étude de l'évolution de la vitesse de la bille et de l'énergie mécanique :

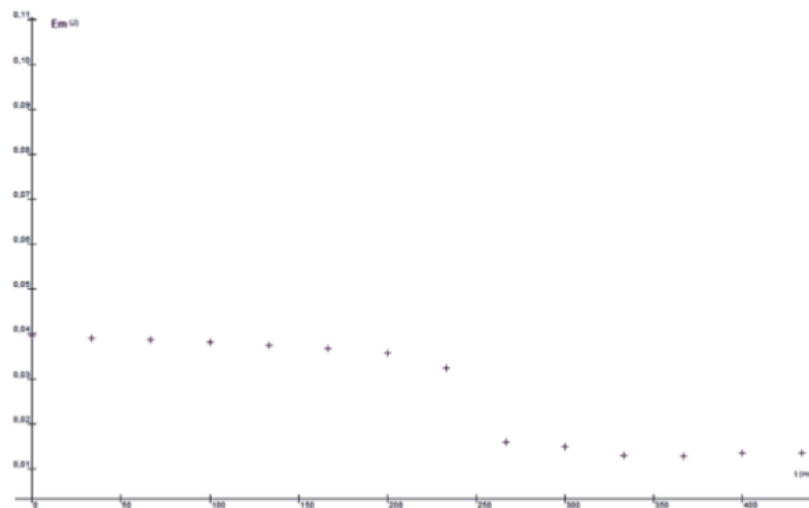
Grandeurs disponibles : t, X, Y, vx, vy, v, Ec, Epp, Em, vm, vr

	Calcul	Grandeur	Fonctions	Unité
Régression		vx=	dX / dt	m*s <sup>-1</sup>
		vy=	dY / dt	m*s <sup>-1</sup>
		v=	sqrt(vx*vx+vy*vy)	u.a.
Dérivée		Ec=	0,5*0,016*v*v	J
		Epp=	0,016*9,81*Y	J
		Em=	Ec+Epp	J
Intégrale		vm=	Mod_fonct("v","%s","a*t+b", 0, 0,25; ;	u.a.
		vm'=	Mod_fonct("v","%s","a*t+b", 0,26; 0,4	u.a.

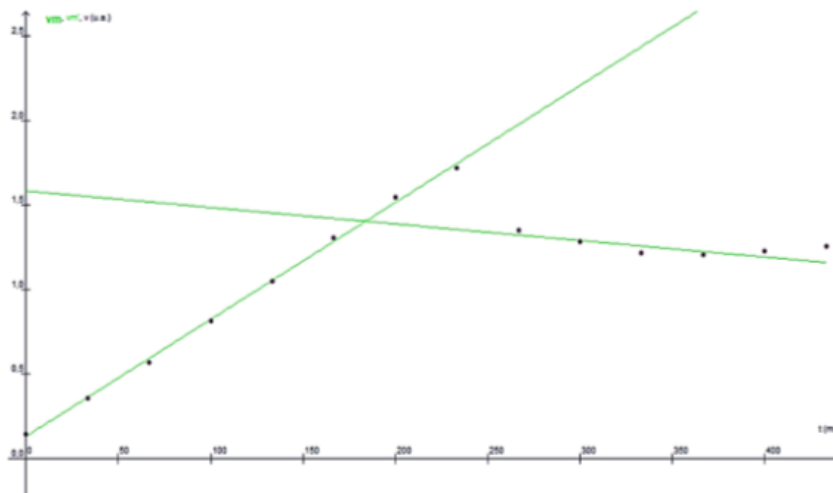
*Grandeurs calculées grâce à la réalisation du pointage du centre de masse de la bille.*

Nous constatons que qu'entre A et C, le mouvement est **rectiligne accéléré** (le coefficient directeur de la courbe  $v=f(t)$  correspond à l'accélération). Entre C et B (deuxième partie de la courbe modélisée) la vitesse est **quasi constante**. C'est en C qu'il y a une diminution notable de la vitesse. La durée pour parcourir la distance D2 est **plus importante que prévue**.

Les frottements étaient bien négligeables mais « le **choc** » de la bille lorsqu'elle arrive en C implique une **diminution** de la vitesse de la bille.



Evolution de l'énergie mécanique de la bille sur la pente à pic.



Evolution de la vitesse de la bille au cours du temps.

Entre A et C et entre C et B, l'énergie mécanique évolue peu. Cependant, ce qui explique le désaccord entre la durée théorique  $t_{pic}$  et le résultat de la manipulation est qu'il y a **transfert d'énergie mécanique** lorsque la bille arrive au point C (elle rebondit un peu).

### C) Elargissement de notre étude à des préoccupations de la vie de tous les jours

Dans le domaine de la mécanique, l'isochronisme du mouvement d'un système qui se déplace sur une cycloïde suscite un intérêt croissant pour ses applications potentielles,

notamment dans le domaine **médical**. En effet, la caractéristique remarquable de cette courbe, où la période d'oscillation d'un objet est indépendante de sa hauteur initiale ou de sa masse, ouvre la voie à des **innovations** significatives.

Considérons l'application de cette propriété à la conception de seringues. En utilisant la forme de la courbe tautochrone pour la trajectoire de la seringue, il devient possible de garantir que le médicament est administré toujours **au même instant**, peu importe la hauteur à laquelle la seringue est tenue et quelle que soit la masse du médicament. Cette propriété isochrone pourrait révolutionner la **précision** des traitements médicaux.

Imaginez un patient recevant un médicament qui nécessite une administration précise, à un moment spécifique. En utilisant une seringue conçue sur le principe de la courbe **tautochrone**, le médicament serait libéré de manière synchronisée, assurant ainsi une efficacité thérapeutique maximale. Plus besoin de calculs complexes pour ajuster la dose en fonction de la hauteur ou du poids du patient ; la courbe tautochrone garantit **l'uniformité** de l'administration.

Cette avancée pourrait avoir un impact significatif sur les soins de santé, en assurant une administration précise et cohérente des médicaments, ce qui pourrait améliorer les résultats thérapeutiques et simplifier les protocoles de traitement. En somme, l'exploration des applications futures de **l'isochronisme** de la courbe tautochrone dans le domaine médical ouvre la porte à des perspectives prometteuses pour l'amélioration des soins de santé et la qualité de vie des patients.

## VII) CONCLUSION

En conclusion, notre étude approfondie de la trajectoire la plus rapide pour la chute d'une bille a révélé des éléments essentiels. Tout d'abord, nous avons démontré l'isochronisme de la courbe tautochrone, soulignant que peu importe la masse et la hauteur de lâcher de l'objet, il atteindra toujours le point le plus bas de la courbe au même instant. Notre étude s'est appuyée sur l'analyse approfondie du pendule cycloïdal, offrant ainsi une base solide pour nos conclusions.

Ensuite, la démonstration de la brachistochrone a confirmé que la courbe tautochrone offre le chemin le plus rapide pour la chute d'un objet, surpassant les pentes abruptes ou les lignes droites. Cette découverte ouvre la voie à des applications pratiques dans divers domaines, de l'ingénierie à la physique, en offrant des solutions efficaces pour les trajectoires optimales.

En outre, notre engagement à partager nos résultats a été manifeste lors de la présentation de notre projet lors des portes ouvertes de février. De plus, nous avons enrichi l'expérience des élèves du lycée en organisant une exposition au CDI, et nous prévoyons de poursuivre cette démarche en présentant notre projet à Saint Nazaire devant des étudiants en prépa. Ces initiatives visent à promouvoir la diffusion du savoir scientifique et à inspirer les générations futures à s'engager dans des études et des recherches similaires.

En somme, notre étude sur les trajectoires de chute des objets a non seulement enrichi notre compréhension théorique, mais a également renforcé notre engagement envers la diffusion du savoir scientifique et la promotion de la recherche dans notre communauté éducative.



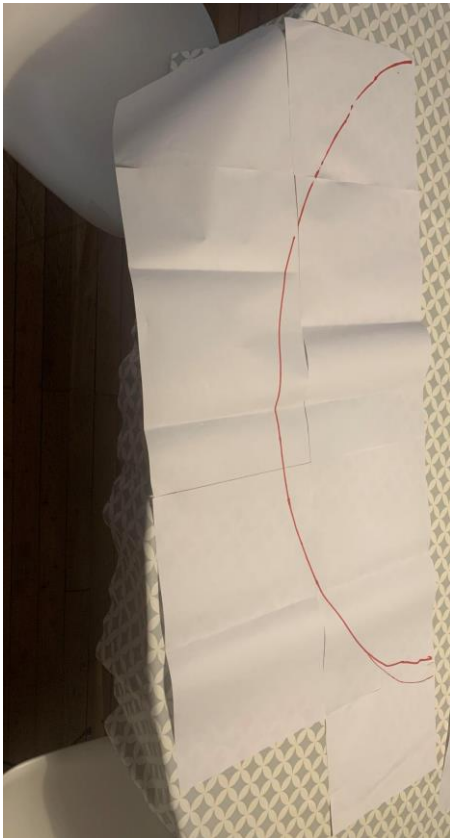
*Présentation de notre projet lors des portes ouvertes*

## ANNEXE 1: RÉALISATION DES MAQUETTES

### A) La construction de la maquette de la cycloïde

Dans la construction on distingue deux grandes parties. La première partie consiste à **reproduire** sur papier la courbe tautochrone voulue. Puis lui **donner forme** à travers une maquette.

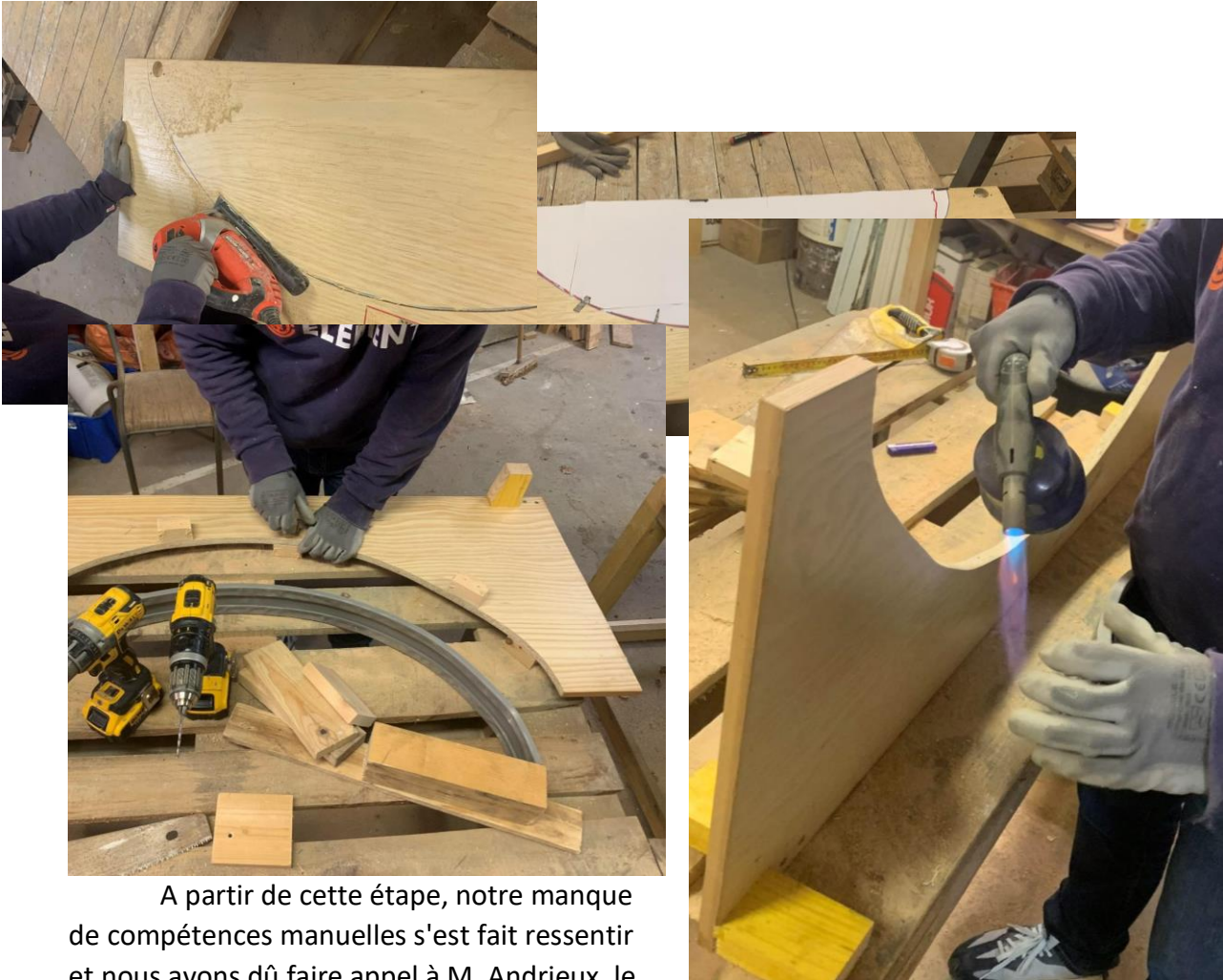
Nous sommes partis du principe que l'on voulait quelque chose d'assez grand pour que se soit plus intéressant lors de la manipulation. Nous sommes donc partis à la recherche d'un objet qui possède une forme cyclique avec des dimensions conséquentes (rayons assez grands). Nous en avons conclu que ce plateau correspondait parfaitement. A l'aide de scotch, une extrémité du plateau a été accrochée à un crayon, ce qui permettra de tracer la courbe tautochrone.



L'étape était assez délicate : il fallait réussir à tracer la courbe. L'enjeu était de réussir à ne pas casser la structure très fragile lors de la manipulation. Nous avons donc tracé la courbe en faisant rouler le plateau le long du mur en prêtant une attention particulière à ce qu'il n'y ait aucun frottement.

A la fin de cette étape nous pouvons être rassurés : le système a tenu! La courbe est cependant mal tracée sur un côté mais parfaite de l'autre. Il a fallu alors superposer la courbe par rapport au milieu pour retracer précisément et obtenir un tracé sûr.

Nous entrons alors dans la seconde partie où nous allons donner forme à notre courbe à travers la maquette. Après l'avoir découpé, on la positionne sur une chute de planche en bois de telle sorte à ce qu'on puisse « décalquer » la courbe sur la planche



A partir de cette étape, notre manque de compétences manuelles s'est fait ressentir et nous avons dû faire appel à M. Andrieux, le père d'un membre de l'équipe. Ainsi a-t-il découpé la courbe précautionneusement à l'aide d'une scie sauteuse et notre maquette commença à prendre forme. La suite est la découpe des bouts de bois qui seront les pieds de notre maquette, puis d'autres qui serviront à accueillir notre support.

Enfin nous avons besoin d'un support pour faire rouler la bille. Nous avons d'abord pensé à une gouttière électrique or nous n'en avons pas à moins d'aller dans un magasin en acheter. On a donc pris une planche en pvc qui a finalement parfaitement bien fait l'affaire -si ce n'est mieux- !

Cette dernière étant rigide, il a fallu la chauffer à l'aide d'un chalumeau pour lui donner sa forme courbée. Au bout de quelques minutes à alterner la chauffe et le pliage, la courbe présentait enfin une forme suffisamment arrondie pour qu'on la fixe à l'aide de vis sur la maquette en lui faisant épouser la courbe préalablement coupée.

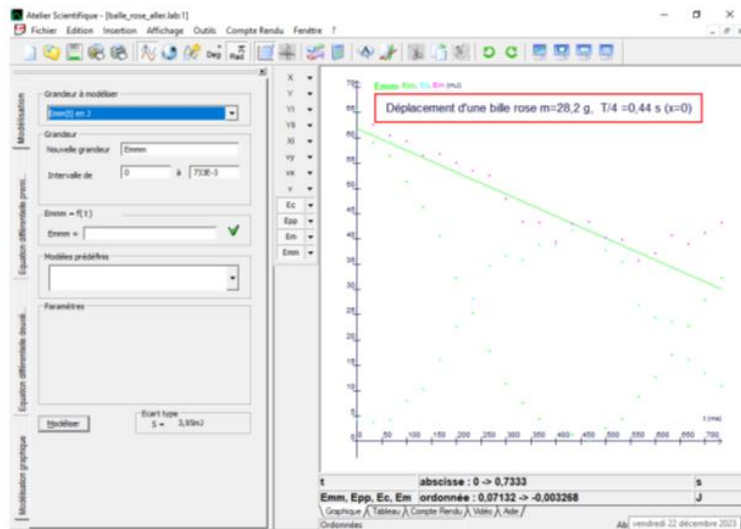


**B) L'hypothèse "les frottements sont négligeables" au cours du mouvement de la bille sur notre maquette était-elle vraiment vérifiée ?**

L'étude du mouvement d'une bille de masse  $m = 28,2\text{g}$  sur notre maquette nous donne le pointage suivant grâce à l'application "atelier scientifique (nous avons montré que la masse n'a pas d'influence sur le temps que mettra la bille à parcourir la distance)" :



Grâce au pointage du centre de masse de la balle, nous obtenons ses coordonnées x et y puis nous calculons  $v_x$  et  $v_y$  les coordonnées de la vitesse (par dérivation). Nous obtenons ensuite  $v$  la valeur de la vitesse et connaissant la masse de la bille  $E_c$  l'énergie cinétique. Nous obtenons ensuite  $E_{pp}$ , l'énergie potentielle du centre de masse de la balle  $E_{pp} = mgy$  (avec  $E_{pp} = 0$  au point le plus bas de la trajectoire). Enfin nous calculons avec le tableur



### C) Nos autres maquettes

Nous avons également réalisé 2 autres maquettes pour nous aider à avancer dans le projet, dont vous avez pu observer l'usage au fil de ce dossier : un **pendule cycloïdal** tel que l'avait imaginé Huygens puis une maquette pour vérifier expérimentalement **le chemin le plus court**.

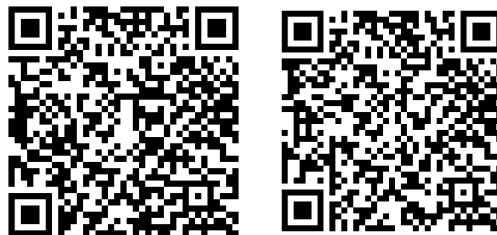


## ANNEXE 2 : QR CODES POUR VISUALISER LES EXPERIENCES REALISEES

A) Les vidéos de manipulation consistant à lâcher une même balle sans vitesse initiale sur la maquette cycloïdale afin de calculer  $T/4$



B) Vidéos de la compétition de billes le long d'une pente "à pic" ou rectiligne ou cycloïdale.



C) Vidéos du pendule cycloïdal pour des oscillations de 20 et 30°

